

TITOLO

Tesi triennale

NOME COGNOME

Facoltà di Matematica
Università di Pisa

DATA

Indice

- ① Complessi simpliciali e poset
- ② Complessi simpliciali e poset
- ③ Rappresentazioni di $\mathfrak{S}_n$
- ④ EL-shellability

Sezione 1

Complessi simpliciali e poset

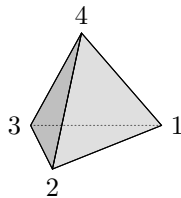
Complessi simpliciali

Definition 1 (Complesso simpliciale astratto)

Sia V un insieme finito di elementi, i **vertici**.
Un **complesso simpliciale astratto** è una collezione $\Delta \subseteq \mathcal{P}(V)$ tale che:

- $\{v\} \in \Delta$ per ogni $v \in V$.
- se $G \in \Delta$ ed $F \subseteq G$ allora $F \in \Delta$.

Gli elementi $F \in \Delta$ si dicono **facce** e gli elementi massimali per contenimento si dicono **facce**.



$$\left\{ \begin{array}{l} \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \\ \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \\ \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right\}$$

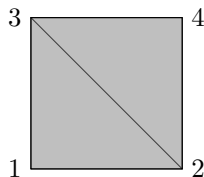
Complessi simpliciali

Definition 1 (Complesso simpliciale astratto)

Sia V un insieme finito di elementi, i **vertici**.
Un **complesso simpliciale astratto** è una collezione $\Delta \subseteq \mathcal{P}(V)$ tale che:

- $\{v\} \in \Delta$ per ogni $v \in V$.
- se $G \in \Delta$ ed $F \subseteq G$ allora $F \in \Delta$.

Gli elementi $F \in \Delta$ si dicono **facce** e gli elementi massimali per contenimento si dicono **facette**.



$$\left\{ \begin{array}{l} \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \\ \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\} \end{array} \right\}$$

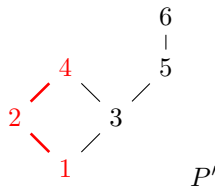
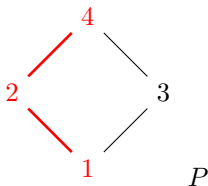
Insiemi parzialmente ordinati

Definition 2 (Catena)

Sia $(P, <)$ un poset. Un sottoinsieme $\mathbf{c} \subseteq P$ è una **catena** se l'ordine parziale $<$ induce un ordine totale su $\mathbf{c}$.

La **lunghezza** della catena è $|\mathbf{c}| - 1$.

La catena si dice **massimale** se è massimale nell'insieme delle catene di P secondo l'ordine $\subseteq$.



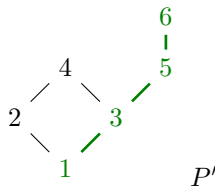
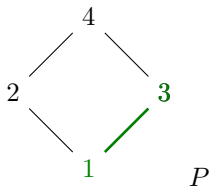
Insiemi parzialmente ordinati

Definition 2 (Catena)

Sia $(P, <)$ un poset. Un sottoinsieme $\mathbf{c} \subseteq P$ è una **catena** se l'ordine parziale $<$ induce un ordine totale su $\mathbf{c}$.

La **lunghezza** della catena è $|\mathbf{c}| - 1$.

La catena si dice **massimale** se è massimale nell'insieme delle catene di P secondo l'ordine $\subseteq$.



Sezione 2

Complessi simpliciali e poset

Complessi simpliciali

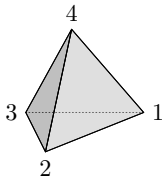
Definition 3 (Complesso simpliciale astratto)

- **Vertici:** un insieme finito V
- **Complesso simpliciale astratto:** un insieme $\Delta \subseteq \mathcal{P}(V)$ con
 - ▶ $\{v\} \in \Delta$ per ogni $v \in V$.
 - ▶ se $G \in \Delta$ e $F \subseteq G$ allora $F \in \Delta$.
- **Facce:** $F \in \Delta$
- **Faccette:** facce massimali in $(\Delta, \subseteq)$

Complessi simpliciali

Definition 3 (Complesso simpliciale astratto)

- **Vertici:** un insieme finito V
- **Complesso simpliciale astratto:** un insieme $\Delta \subseteq \mathcal{P}(V)$ con
 - ▶ $\{v\} \in \Delta$ per ogni $v \in V$.
 - ▶ se $G \in \Delta$ e $F \subseteq G$ allora $F \in \Delta$.
- **Facce:** $F \in \Delta$
- **Faccette:** facce massimali in $(\Delta, \subseteq)$

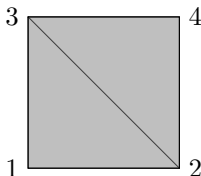


$$\Delta_1 = \left\{ \begin{array}{l} \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \\ \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \\ \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right\}$$

Complessi simpliciali

Definition 3 (Complesso simpliciale astratto)

- **Vertici:** un insieme finito V
- **Complesso simpliciale astratto:** un insieme $\Delta \subseteq \mathcal{P}(V)$ con
 - ▶ $\{v\} \in \Delta$ per ogni $v \in V$.
 - ▶ se $G \in \Delta$ e $F \subseteq G$ allora $F \in \Delta$.
- **Facce:** $F \in \Delta$
- **Faccette:** facce massimali in $(\Delta, \subseteq)$

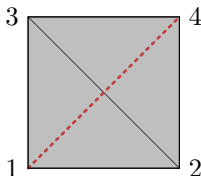


$$\Delta_2 = \left\{ \begin{array}{l} \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \\ \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\} \end{array} \right\}$$

Complessi simpliciali

Definition 3 (Complesso simpliciale astratto)

- **Vertici:** un insieme finito V
- **Complesso simpliciale astratto:** un insieme $\Delta \subseteq \mathcal{P}(V)$ con
 - ▶ $\{v\} \in \Delta$ per ogni $v \in V$.
 - ▶ se $G \in \Delta$ e $F \subseteq G$ allora $F \in \Delta$.
- **Facce:** $F \in \Delta$
- **Faccette:** facce massimali in $(\Delta, \subseteq)$



$$\Delta_2 = \left\{ \begin{array}{c} \{1, 4\} \\ \text{---} \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \\ \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\} \end{array} \right\}$$

Insiemi parzialmente ordinati

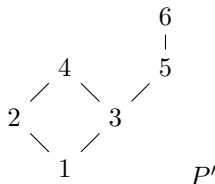
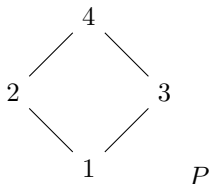
Definition 4 (Poset)

- **Poset**: una coppia $(P, <_P)$
- Poset **limitato**: esistono $\hat{0}, \hat{1}$ minimo e massimo di $<_P$
- Poset **ridotto**: $\overline{P} = P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$

Insiemi parzialmente ordinati

Definition 4 (Poset)

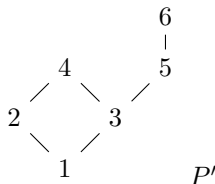
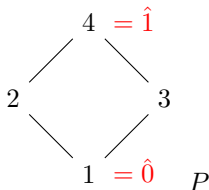
- **Poset**: una coppia $(P, <_P)$
- Poset **limitato**: esistono $\hat{0}, \hat{1}$ minimo e massimo di $<_P$
- Poset **ridotto**: $\overline{P} = P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$



Insiemi parzialmente ordinati

Definition 4 (Poset)

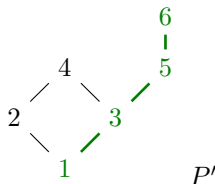
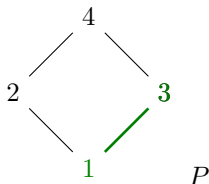
- **Poset**: una coppia $(P, <_P)$
- Poset **limitato**: esistono $\hat{0}, \hat{1}$ minimo e massimo di $<_P$
- Poset **ridotto**: $\overline{P} = P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$



Insiemi parzialmente ordinati

Definition 5 (Catena)

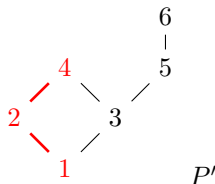
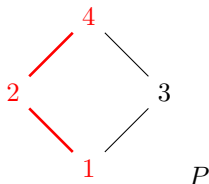
- **Catena**: sottoinsieme $\mathbf{c} \subset P$ tale che $(\mathbf{c}, <_P)$ è ordine totale
- Catena **massimale**: catena che è massimo in $(\mathcal{M}(P), \subseteq)$
- **Lunghezza**: $|\mathbf{c}| - 1$



Insiemi parzialmente ordinati

Definition 5 (Catena)

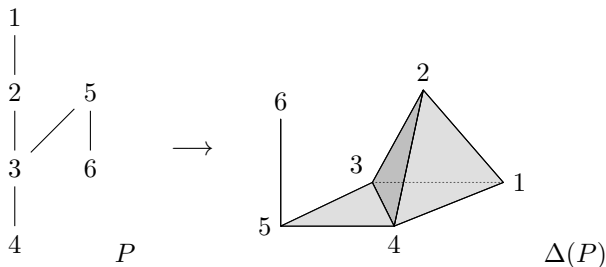
- **Catena**: sottoinsieme $\mathbf{c} \subset P$ tale che $(\mathbf{c}, <_P)$ è ordine totale
- Catena **massimale**: catena che è massimo in $(\mathcal{M}(P), \subseteq)$
- **Lunghezza**: $|\mathbf{c}| - 1$



Order complex

Definition 6 (Order complex)

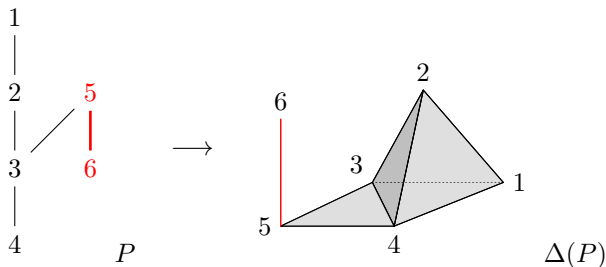
- **Order complex** di P : un complesso simpliciale astratto $\Delta(P)$
 - ▶ **vertici** sono gli elementi di P
 - ▶ **facce** sono le catene di P



Order complex

Definition 6 (Order complex)

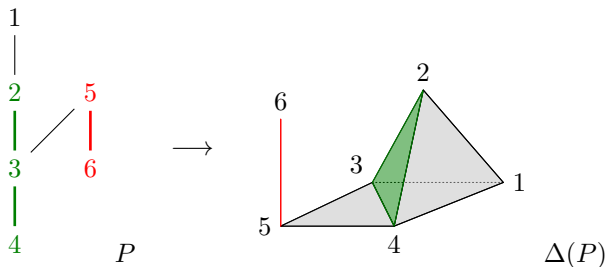
- **Order complex** di P : un complesso simpliciale astratto $\Delta(P)$
 - ▶ **vertici** sono gli elementi di P
 - ▶ **facce** sono le catene di P



Order complex

Definition 6 (Order complex)

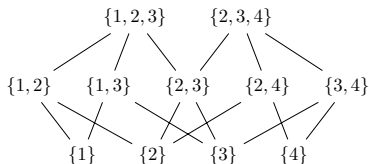
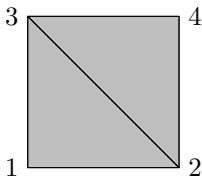
- **Order complex** di P : un complesso simpliciale astratto $\Delta(P)$
 - ▶ **vertici** sono gli elementi di P
 - ▶ **facce** sono le catene di P



Face poset

Definition 7

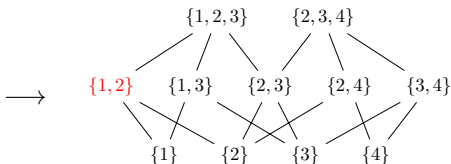
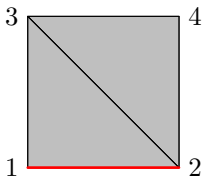
- **Face poset** di Δ : un poset $(P(\Delta), <)$ con
 - ▶ elementi dati da $\Delta \setminus \emptyset$
 - ▶ relazione $<$ data dall'inclusione $\subset$



Face poset

Definition 7

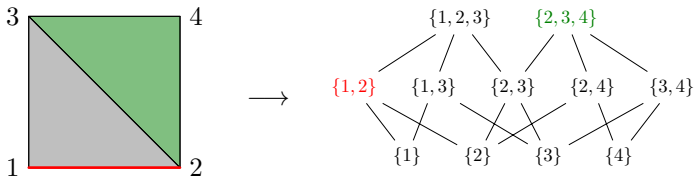
- **Face poset** di Δ : un poset $(P(\Delta), <)$ con
 - ▶ elementi dati da $\Delta \setminus \emptyset$
 - ▶ relazione $<$ data dall'inclusione $\subset$



Face poset

Definition 7

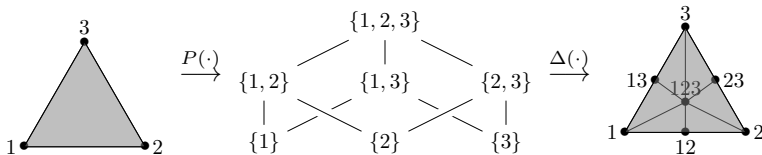
- **Face poset** di Δ : un poset $(P(\Delta), <)$ con
 - ▶ elementi dati da $\Delta \setminus \emptyset$
 - ▶ relazione $<$ data dall'inclusione $\subset$



Suddivisione baricentrica

Proposizione 8

$\Delta(P(\Delta))$ è la *suddivisione baricentrica* del complesso Δ



Omologia di poset

Siano P poset e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ o campo.

- **Complesso di catene:** per $j \geq -1$

$C_j(P; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ -modulo libero generato dalle j -catene

- **Mappa di bordo:**

$$\begin{aligned} \partial_j : C_j(P; \mathbb{K}) &\longrightarrow C_{j-1}(P; \mathbb{K}) \\ (x_0 < \cdots < x_j) &\longmapsto \sum_{i=0}^j (-1)^i (x_0 < \cdots < \hat{x}_i < \cdots < x_j) \end{aligned}$$

- **Omologia di poset:**

$$\begin{cases} B_j(P; \mathbb{K}) = \text{Im } \partial_{j+1} \\ Z_j(P; \mathbb{K}) = \ker \partial_j \end{cases} \quad \tilde{H}_j(P; \mathbb{K}) = Z_j(P; \mathbb{K}) / B_j(P; \mathbb{K})$$

Omologia di poset

Siano P poset e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ o campo.

- **Complesso di catene:** per $j \geq -1$

$C_j(P; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ -modulo libero generato dalle j -catene

- **Mappa di bordo:**

$$\begin{aligned} \partial_j : C_j(P; \mathbb{K}) &\longrightarrow C_{j-1}(P; \mathbb{K}) \\ (x_0 < \cdots < x_j) &\longmapsto \sum_{i=0}^j (-1)^i (x_0 < \cdots < \hat{x}_i < \cdots < x_j) \end{aligned}$$

- **Omologia di poset:**

$$\begin{cases} B_j(P; \mathbb{K}) = \text{Im } \partial_{j+1} \\ Z_j(P; \mathbb{K}) = \ker \partial_j \end{cases}$$

$$\tilde{H}_j(P; \mathbb{K}) = Z_j(P; \mathbb{K}) / B_j(P; \mathbb{K})$$

Omologia di poset

Siano P poset e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ o campo.

- **Complesso di catene:** per $j \geq -1$

$C_j(P; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ -modulo libero generato dalle j -catene

- **Mappa di bordo:**

$$\begin{aligned} \partial_j : C_j(P; \mathbb{K}) &\longrightarrow C_{j-1}(P; \mathbb{K}) \\ (x_0 < \cdots < x_j) &\longmapsto \sum_{i=0}^j (-1)^i (x_0 < \cdots < \hat{x}_i < \cdots < x_j) \end{aligned}$$

- **Omologia di poset:**

$$\begin{cases} B_j(P; \mathbb{K}) = \text{Im } \partial_{j+1} \\ Z_j(P; \mathbb{K}) = \ker \partial_j \end{cases}$$

$$\tilde{H}_j(P; \mathbb{K}) = Z_j(P; \mathbb{K}) / B_j(P; \mathbb{K})$$

Coomologia di poset

Siano P poset e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ o campo.

- **Complesso di cocatene:** per $j \geq -1$

$C_j(P; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ -modulo libero generato dalle j -catene

- **Mappa di cobordo:**

$$\delta_j : C_j(P; \mathbb{K}) \rightarrow C_{j+1}(P; \mathbb{K})$$

$$(x_0 < \cdots < x_j) \mapsto \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \sum_{y \in (x_{i-1}, x_i)} (x_0 < \cdots < x_{i-1} < y < x_i < \cdots < x_j)$$

- **Coomologia di poset:**

$$\begin{cases} B^j(P; \mathbb{K}) = \text{Im } \delta_{j-1} \\ Z^j(P; \mathbb{K}) = \ker \delta_j \end{cases} \quad \tilde{H}^j(P; \mathbb{K}) = Z^j(P; \mathbb{K}) / B^j(P; \mathbb{K})$$

Coomologia di poset

Siano P poset e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ o campo.

- **Complesso di cocatene:** per $j \geq -1$

$C_j(P; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ -modulo libero generato dalle j -catene

- **Mapa di cobordo:**

$$\delta_j : C_j(P; \mathbb{K}) \rightarrow C_{j+1}(P; \mathbb{K})$$

$$(x_0 < \cdots < x_j) \mapsto \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \sum_{y \in (x_{i-1}, x_i)} (x_0 < \cdots < x_{i-1} < y < x_i < \cdots < x_j)$$

- **Coomologia di poset:**

$$\begin{cases} B^j(P; \mathbb{K}) = \text{Im } \delta_{j-1} \\ Z^j(P; \mathbb{K}) = \ker \delta_j \end{cases}$$

$$\tilde{H}^j(P; \mathbb{K}) = Z^j(P; \mathbb{K}) / B^j(P; \mathbb{K})$$

Coomologia di poset

Siano P poset e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ o campo.

- **Complesso di cocatene:** per $j \geq -1$

$C_j(P; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ -modulo libero generato dalle j -catene

- **Mapa di cobordo:**

$$\delta_j : C_j(P; \mathbb{K}) \rightarrow C_{j+1}(P; \mathbb{K})$$

$$(x_0 < \cdots < x_j) \mapsto \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \sum_{y \in (x_{i-1}, x_i)} (x_0 < \cdots < x_{i-1} < y < x_i < \cdots < x_j)$$

- **Coomologia di poset:**

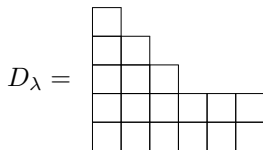
$$\begin{cases} B^j(P; \mathbb{K}) = \text{Im } \delta_{j-1} \\ Z^j(P; \mathbb{K}) = \ker \delta_j \end{cases}$$

$$\tilde{H}^j(P; \mathbb{K}) = Z^j(P; \mathbb{K}) / B^j(P; \mathbb{K})$$

Sezione 3
Rappresentazioni di $\mathfrak{S}_n$

Tableaux

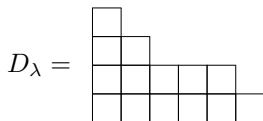
- **Partizione:** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h) \vdash n$ tupla con $\sum_{i=1}^h \lambda_i = n$
- **Diagramma di Ferrer:** $D_\lambda \subset \mathbb{Z}^2$



$$\lambda = (6, 6, 3, 2, 1) \vdash 18$$

Tableaux

- **Partizione:** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h) \vdash n$ tupla con $\sum_{i=1}^h \lambda_i = n$
- **Diagramma di Ferrer:** $D_\lambda \subset \mathbb{Z}^2$



$$\lambda = (6, 5, 2, 1) \vdash 14$$

Tableaux

- **Partizione:** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h) \vdash n$ tupla con $\sum_{i=1}^h \lambda_i = n$
- **Diagramma di Ferrer:** $D_\lambda \subset \mathbb{Z}^2$

Definition 9 (Tableaux)

- **Tableaux di forma λ :** array $T = (T_{(i,j)}) \in \mathbb{N}^n$ con indici in D_λ

Tableau
generico
 $\lambda = (6, 5, 2, 1)$

52						
13	4					
4	51	2	12	8		
11	32	5	7	7	1	

Tableaux

- **Partizione:** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h) \vdash n$ tupla con $\sum_{i=1}^h \lambda_i = n$
- **Diagramma di Ferrer:** $D_\lambda \subset \mathbb{Z}^2$

Definition 9 (Tableaux)

- **Tableaux** di **forma** λ : array $T = (T_{(i,j)}) \in \mathbb{N}^n$ con indici in D_λ

Injective
tableau $\mathcal{T}_\lambda$

$$\lambda = (6, 5, 2, 1)$$

3					
13	12				
1	8	11	5	6	
4	2	14	10	7	9

 $\subset [n]^n$

Tableaux

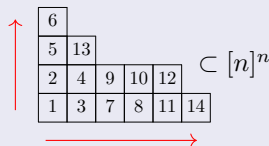
- **Partizione:** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h) \vdash n$ tupla con $\sum_{i=1}^h \lambda_i = n$
- **Diagramma di Ferrer:** $D_\lambda \subset \mathbb{Z}^2$

Definition 9 (Tableaux)

- **Tableaux di forma λ :** array $T = (T_{(i,j)}) \in \mathbb{N}^n$ con indici in D_λ

**Young standard
tableau $\text{SYT}(\lambda)$**

$$\lambda = (6, 5, 2, 1)$$



Azioni di $\mathfrak{S}_n$ sui tableaux

Siano $\lambda \vdash n$, $T \in \mathcal{T}_\lambda$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- **Azione sinistra:** per ogni $(i, j) \in D_\lambda$

$$(\sigma \cdot T)_{(i,j)} = \sigma(T_{(i,j)})$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \sigma \cdot T = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

- **Azione destra:** per ogni $k \in [n]$

$$(T \cdot \sigma)_k = T_{\sigma(k)}$$

Azioni di $\mathfrak{S}_n$ sui tableaux

Siano $\lambda \vdash n$, $T \in \mathcal{T}_\lambda$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- **Azione sinistra:** per ogni $(i, j) \in D_\lambda$

$$(\sigma \cdot T)_{(i,j)} = \sigma(T_{(i,j)})$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline \color{red}{1} & 3 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \sigma \cdot T = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

- **Azione destra:** per ogni $k \in [n]$

$$(T \cdot \sigma)_k = T_{\sigma(k)}$$

Azioni di $\mathfrak{S}_n$ sui tableaux

Siano $\lambda \vdash n$, $T \in \mathcal{T}_\lambda$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Azione sinistra:** per ogni $(i, j) \in D_\lambda$

$$(\sigma \cdot T)_{(i,j)} = \sigma(T_{(i,j)})$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \textcolor{green}{3} & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline \textcolor{red}{1} & 3 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \sigma \cdot T = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \textcolor{green}{3} & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

- Azione destra:** per ogni $k \in [n]$

$$(T \cdot \sigma)_k = T_{\sigma(k)}$$

Azioni di $\mathfrak{S}_n$ sui tableaux

Siano $\lambda \vdash n$, $T \in \mathcal{T}_\lambda$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- **Azione sinistra:** per ogni $(i, j) \in D_\lambda$

$$(\sigma \cdot T)_{(i,j)} = \sigma(T_{(i,j)})$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \textcolor{red}{2} & 3 & 4 & 5 \\ 3 & \textcolor{green}{1} & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 5 & \textcolor{red}{2} \\ \hline \end{array} \quad \sigma \cdot T = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline 3 & \\ \hline & \textcolor{green}{1} \\ \hline \end{array}$$

- **Azione destra:** per ogni $k \in [n]$

$$(T \cdot \sigma)_k = T_{\sigma(k)}$$

Azioni di $\mathfrak{S}_n$ sui tableaux

Siano $\lambda \vdash n$, $T \in \mathcal{T}_\lambda$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- **Azione sinistra:** per ogni $(i, j) \in D_\lambda$

$$(\sigma \cdot T)_{(i,j)} = \sigma(T_{(i,j)})$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \sigma \cdot T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

- **Azione destra:** per ogni $k \in [n]$

$$(T \cdot \sigma)_k = T_{\sigma(k)}$$

Azioni di $\mathfrak{S}_n$ sui tableaux

Siano $\lambda \vdash n$, $T \in \mathcal{T}_\lambda$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- **Azione sinistra:** per ogni $(i, j) \in D_\lambda$

$$(\sigma \cdot T)_{(i,j)} = \sigma(T_{(i,j)})$$

- **Azione destra:** per ogni $k \in [n]$

$$(T \cdot \sigma)_k = T_{\sigma(k)}$$

5	
3	4
1	2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4	
1	3
5	2

5	

Indicizzazione

Azioni di $\mathfrak{S}_n$ sui tableaux

Siano $\lambda \vdash n$, $T \in \mathcal{T}_\lambda$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- **Azione sinistra:** per ogni $(i, j) \in D_\lambda$

$$(\sigma \cdot T)_{(i,j)} = \sigma(T_{(i,j)})$$

- **Azione destra:** per ogni $k \in [n]$

$$(T \cdot \sigma)_k = T_{\sigma(k)}$$

5	
3	4
1	2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \textcolor{red}{2} & 3 & 4 & 5 \\ 3 & \textcolor{green}{1} & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4	
1	3
5	2

5	
2	

Indicizzazione

Azioni di $\mathfrak{S}_n$ sui tableaux

Siano $\lambda \vdash n$, $T \in \mathcal{T}_\lambda$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- **Azione sinistra:** per ogni $(i, j) \in D_\lambda$

$$(\sigma \cdot T)_{(i,j)} = \sigma(T_{(i,j)})$$

- **Azione destra:** per ogni $k \in [n]$

$$(T \cdot \sigma)_k = T_{\sigma(k)}$$

5	
3	4
1	2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4	
1	3
5	2

1	
5	4
2	3

Indicizzazione

Azioni di $\mathfrak{S}_n$ sui tableaux

Siano $\lambda \vdash n$, $T \in \mathcal{T}_\lambda$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- **Azione sinistra:** per ogni $(i, j) \in D_\lambda$

$$(\sigma \cdot T)_{(i,j)} = \sigma(T_{(i,j)})$$

- **Azione destra:** per ogni $k \in [n]$

$$(T \cdot \sigma)_k = T_{\sigma(k)}$$

Proposizione 10

Le azioni di $\mathfrak{S}_n$ commutano: per $\pi, \sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\pi \cdot (T \cdot \sigma) = (\pi \cdot T) \cdot \sigma$$

Moduli di Specht

- Modulo degli injective tableaux:

$M^\lambda = \mathbb{C}$ -modulo libero con base $\mathcal{T}_\lambda$

- Relazioni di riga: sia R_λ row subgroup.

$$r_\sigma(T) = T \cdot \sigma - T \quad \text{per } \sigma \in R_\lambda$$

- Relazioni di Garnir: sia $G_{i,j}(\lambda)$ Garnir subgroup.

$$g_{i,j}(T) = \sum_{\sigma \in G_{i,j}(T)} T \cdot \sigma$$

Moduli di Specht

- Modulo degli injective tableaux:

$M^\lambda = \mathbb{C}$ -modulo libero con base $\mathcal{T}_\lambda$

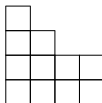
- Relazioni di riga:** sia R_λ *row subgroup*.

$$r_\sigma(T) = T \cdot \sigma - T \quad \text{per } \sigma \in R_\lambda$$

- Relazioni di Garnir: sia $G_{i,j}(\lambda)$ *Garnir subgroup*.

$$g_{i,j}(T) = \sum_{\sigma \in G_{i,j}(T)} T \cdot \sigma$$

$\lambda = (4, 4, 2, 1)$



Moduli di Specht

- Modulo degli injective tableaux:

$M^\lambda = \mathbb{C}$ -modulo libero con base $\mathcal{T}_\lambda$

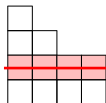
- Relazioni di riga:** sia R_λ *row subgroup*.

$$r_\sigma(T) = T \cdot \sigma - T \quad \text{per } \sigma \in R_\lambda$$

- Relazioni di Garnir:** sia $G_{i,j}(\lambda)$ *Garnir subgroup*.

$$g_{i,j}(T) = \sum_{\sigma \in G_{i,j}(T)} T \cdot \sigma$$

$\lambda = (4, 4, 2, 1)$



Moduli di Specht

- Modulo degli injective tableaux:

$M^\lambda = \mathbb{C}$ -modulo libero con base $\mathcal{T}_\lambda$

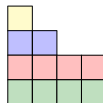
- Relazioni di riga:** sia R_λ *row subgroup*.

$$r_\sigma(T) = T \cdot \sigma - T \quad \text{per } \sigma \in R_\lambda$$

- Relazioni di Garnir:** sia $G_{i,j}(\lambda)$ *Garnir subgroup*.

$$g_{i,j}(T) = \sum_{\sigma \in G_{i,j}(T)} T \cdot \sigma$$

$\lambda = (4, 4, 2, 1)$



Moduli di Specht

- Modulo degli injective tableaux:

$M^\lambda = \mathbb{C}$ -modulo libero con base $\mathcal{T}_\lambda$

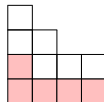
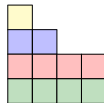
- Relazioni di riga:** sia R_λ *row subgroup*.

$$r_\sigma(T) = T \cdot \sigma - T \quad \text{per } \sigma \in R_\lambda$$

- Relazioni di Garnir:** sia $G_{i,j}(\lambda)$ *Garnir subgroup*.

$$g_{i,j}(T) = \sum_{\sigma \in G_{i,j}(T)} T \cdot \sigma$$

$\lambda = (4, 4, 2, 1)$



$G_{1,1}(\lambda)$

Moduli di Specht

- Modulo degli injective tableaux:

$M^\lambda = \mathbb{C}$ -modulo libero con base $\mathcal{T}_\lambda$

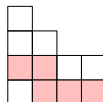
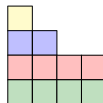
- Relazioni di riga:** sia R_λ *row subgroup*.

$$r_\sigma(T) = T \cdot \sigma - T \quad \text{per } \sigma \in R_\lambda$$

- Relazioni di Garnir:** sia $G_{i,j}(\lambda)$ *Garnir subgroup*.

$$g_{i,j}(T) = \sum_{\sigma \in G_{i,j}(T)} T \cdot \sigma$$

$\lambda = (4, 4, 2, 1)$



$G_{1,2}(\lambda)$

Moduli di Specht

- Modulo degli injective tableaux:

$M^\lambda = \mathbb{C}$ -modulo libero con base $\mathcal{T}_\lambda$

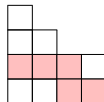
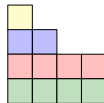
- Relazioni di riga:** sia R_λ *row subgroup*.

$$r_\sigma(T) = T \cdot \sigma - T \quad \text{per } \sigma \in R_\lambda$$

- Relazioni di Garnir:** sia $G_{i,j}(\lambda)$ *Garnir subgroup*.

$$g_{i,j}(T) = \sum_{\sigma \in G_{i,j}(T)} T \cdot \sigma$$

$\lambda = (4, 4, 2, 1)$



$G_{1,3}(\lambda)$

Moduli di Specht

- Modulo degli injective tableaux:

$M^\lambda = \mathbb{C}$ -modulo libero con base $\mathcal{T}_\lambda$

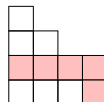
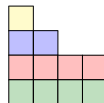
- Relazioni di riga:** sia R_λ *row subgroup*.

$$r_\sigma(T) = T \cdot \sigma - T \quad \text{per } \sigma \in R_\lambda$$

- Relazioni di Garnir:** sia $G_{i,j}(\lambda)$ *Garnir subgroup*.

$$g_{i,j}(T) = \sum_{\sigma \in G_{i,j}(T)} T \cdot \sigma$$

$\lambda = (4, 4, 2, 1)$



$G_{1,4}(\lambda)$

Moduli di Specht

- M^λ = “ $\mathbb{C}$ -modulo libero con base $\mathcal{T}_\lambda$ ”
- U^λ = “sottomodulo generato da relazioni di riga e Garnir”

Definition 11 (Moduli di Specht)

- **Modulo di Specht di forma λ :**

$$S^\lambda = M^\lambda / U^\lambda$$

Theorem 12

$\{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ sono le $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazioni irriducibili

Moduli di Specht

- M^λ = “ $\mathbb{C}$ -modulo libero con base $\mathcal{T}_\lambda$ ”
- U^λ = “sottomodulo generato da relazioni di riga e Garnir”

Definition 11 (Moduli di Specht)

- **Modulo di Specht** di **forma** λ :

$$S^\lambda = M^\lambda / U^\lambda$$

Theorem 12

$\{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ sono le $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazioni irriducibili

Moduli di Specht

- M^λ = “ $\mathbb{C}$ -modulo libero con base $\mathcal{T}_\lambda$ ”
- U^λ = “sottomodulo generato da relazioni di riga e Garnir”

Definition 11 (Moduli di Specht)

- **Modulo di Specht** di **forma** λ :

$$S^\lambda = M^\lambda / U^\lambda$$

Theorem 12

$\{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ sono le $\mathfrak{S}_n$ -rappresentazioni irriducibili

Sezione 4

EL-shellability

Shellability

- **Complesso puro**: tutte le faccette di dimensione $\dim \Delta$

Definition 13 (Complesso simpliciale shellable)

- **Complesso shellable**: esiste un ordine $F_1, F_2, \dots, F_n$ delle faccette tale che per $j = 1, 2, \dots, n - 1$ il sottocomplesso

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} \langle F_i \rangle \right) \cap \langle F_j \rangle$$

▶ è puro

▶ ha dimensione $\dim(F_j) - 1$

Shellability

- **Complesso puro**: tutte le faccette di dimensione $\dim \Delta$

Definition 13 (Complesso simpliciale shellable)

- **Complesso shellable**: esiste un ordine $F_1, F_2, \dots, F_n$ delle faccette tale che per $j = 1, 2, \dots, n - 1$ il sottocomplesso

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} \langle F_i \rangle \right) \cap \langle F_j \rangle$$

▶ è puro

▶ ha dimensione $\dim(F_j) - 1$

Shellability

- **Complesso puro**: tutte le faccette di dimensione $\dim \Delta$

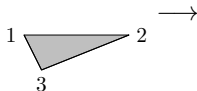
Definition 13 (Complesso simpliciale shellable)

- **Complesso shellable**: esiste un ordine $F_1, F_2, \dots, F_n$ delle faccette tale che per $j = 1, 2, \dots, n - 1$ il sottocomplesso

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} \langle F_i \rangle \right) \cap \langle F_j \rangle$$

► è puro

► ha dimensione $\dim(F_j) - 1$



Shellability

- **Complesso puro**: tutte le faccette di dimensione $\dim \Delta$

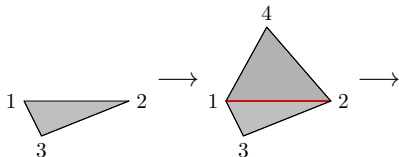
Definition 13 (Complesso simpliciale shellable)

- **Complesso shellable**: esiste un ordine $F_1, F_2, \dots, F_n$ delle faccette tale che per $j = 1, 2, \dots, n - 1$ il sottocomplesso

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} \langle F_i \rangle \right) \cap \langle F_j \rangle$$

▶ è puro

▶ ha dimensione $\dim(F_j) - 1$



Shellability

- **Complesso puro**: tutte le faccette di dimensione $\dim \Delta$

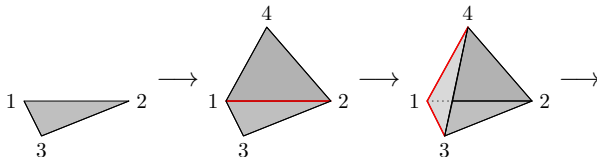
Definition 13 (Complesso simpliciale shellable)

- **Complesso shellable**: esiste un ordine $F_1, F_2, \dots, F_n$ delle faccette tale che per $j = 1, 2, \dots, n - 1$ il sottocomplesso

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} \langle F_i \rangle \right) \cap \langle F_j \rangle$$

▶ è puro

▶ ha dimensione $\dim(F_j) - 1$



Shellability

- **Complesso puro**: tutte le faccette di dimensione $\dim \Delta$

Definition 13 (Complesso simpliciale shellable)

- **Complesso shellable**: esiste un ordine $F_1, F_2, \dots, F_n$ delle faccette tale che per $j = 1, 2, \dots, n - 1$ il sottocomplesso

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} \langle F_i \rangle \right) \cap \langle F_j \rangle$$

▶ è puro

▶ ha dimensione $\dim(F_j) - 1$

